Θεώρημα

Έστω ένα σύστημα κλειστού βρόχου με πόλους αριστερότερα από κάποιο $-\alpha$, $\alpha>0$ και με ελεγκτή που περιέχει ένα πόλο τουλάχιστον στο μηδέν. Τότε, για μηδενικά z_0 της εγκατάστασης που δεν απαλοίφονται, τέτοια ώστε $\mathrm{Re}(z_0)>-\alpha$ ή για πόλους p_0 της εγκατάστασης που δεν απαλοίφονται, τέτοια ώστε $\mathrm{Re}(p_0)>-\alpha$, ισχύουν:

(α) Για (θετική) είσοδο αναφοράς μοναδιαίας βαθμίδας,

$$\int_0^\infty e(t)e^{-z_0 t}\mathrm{d}t = \tfrac{1}{z_0} \tag{1}$$

$$\int_0^\infty e(t)e^{-p_0 t}\mathrm{d}t = 0 \tag{2}$$

(β) Για (θετική) είσοδο αναφοράς μοναδιαίας βαθμίδας και z_0 στο δεξιό ημιεπίπεδο,

$$\int_0^\infty y(t)e^{-z_0 t}\mathrm{d}t = 0 \tag{3}$$

(γ) Για (αρνητική) διαταραχή μοναδιαίας βαθμίδας στην είσοδο,

$$\int_0^\infty e(t)e^{-z_0 t}\mathrm{d}t = 0 \tag{4}$$

$$\int_0^\infty e(t)e^{-p_0 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{p_0 C(p_0)} \tag{5}$$

όπου $e(t)$ το σήμα εισόδου στον ελεγκτή.

Απόδειξη:

Θα χρειαστώ το απλό λήμμα που προκύπτει από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace:

Λήμμα: Έστω $H(s)$ μία αυστηρά πρέπουσα συνάρτηση της μεταβλητής Laplace s, με περιοχή σύγκλισης $\mathrm{Re}(s)>-\alpha$ και ως συνήθως $\mathcal{L}\{h(t)\} \triangleq H(s)$. Τότε, για κάθε z_0 τέτοιο ώστε $\mathrm{Re}(z_0)>-\alpha$, ισχύει,

$$\int_0^\infty h(t)e^{-z_0 t}\mathrm{d}t = \underset{s\to z_0}{\text{ορ}}\ H(s) \tag{6}$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό του μετασχηματισμού,

$$\int_0^\infty h(t)e^{-st}\mathrm{d}t = H(s) \tag{7}$$

οπότε η ισχύς του λήμματος προκύπτει ευθέως.

Στη περίπτωση που εξετάζεται, όλοι οι πόλοι και τα μηδενικά του ανοικτού βρόχου είναι εντός της περιοχής σύγκλισης του μετασχηματισμού, δηλαδή κείνται δεξιότερα των πόλων του κλειστού βρόχου. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι ακόμη και αν η $e^{-z_0 t}$ (η $e^{-p_0 t}$) είναι αύξουσες, το γινόμενο $e(t)e^{-z_0 t}$ φθίνει εκθετικά.

Πριν ξεκινήσω την καθ' αυτό απόδειξη ας θυμίσω ότι,

$$e(s) = \frac{1}{1+C(s)P(s)}r(s) - \frac{P(s)}{1+C(s)P(s)}d(s) \tag{8}$$

$$y(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}r(s) \tag{9}$$

$$C(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)}, \quad P(s) = \frac{n_p(s)}{d_p(s)} \tag{10}$$

(α) Στη περίπτωση αυτή από τις (6), (8):

$$\int_0^\infty e(t)e^{-z_0 t}\mathrm{d}t = \underset{s\to z_0}{\text{ορ}}\ e(s) = \frac{1}{1+C(z_0)P(z_0)}\frac{1}{z_0} = \frac{1}{z_0} \tag{1}$$

και,

$$\int_0^\infty e(t)e^{-p_0 t}\mathrm{d}t = \underset{s\to p_0}{\text{ορ}}\ e(s) = \underset{s\to p_0}{\text{ορ}}\ \frac{1}{1+C(s)P(s)}\frac{1}{s} = \frac{1}{1+C(p_0)\ \underset{s\to p_0}{\text{ορ}}\ P(s)}\frac{1}{p_0} = 0 \tag{1}$$

αφού, $\underset{s\to p_0}{\text{ορ}}\ P(s) = \infty$.

(β) Στη περίπτωση αυτή από τις (6), (9),

$$\int_0^{\infty} y(t)e^{-z_0 t}\mathrm{d}t = \underset{s\to z_0}{\text{ορ}}\; y(s) = \underset{s\to z_0}{\text{ορ}}\; \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}\frac{1}{s} = 0 \tag{1}$$

αφού, $\underset{s\to z_0}{\text{ορ}}\; P(s) = 0$.

(γ) Στη περίπτωση αυτή από τις (6), (8), (10):

$$\int_0^{\infty} e(t)e^{-z_0 t}\mathrm{d}t = \underset{s\to z_0}{\text{ορ}}\; e(s) = -\frac{P(z_0)}{1+C(z_0)P(z_0)}\left(-\frac{1}{z_0}\right) = 0$$

και,

$$\int_0^{\infty} e(t)e^{-p_0 t}\mathrm{d}t = \underset{s\to p_0}{\text{ορ}}\; e(s) = -\frac{P(p_0)}{1+C(p_0)P(p_0)}\left(-\frac{1}{p_0}\right) = \frac{1}{p_0}\frac{\dfrac{n_p(p_0)}{d_p(p_0)}}{1+\dfrac{n_c(p_0)}{d_c(p_0)}\dfrac{n_p(p_0)}{d_p(p_0)}} =$$

$$= \frac{1}{p_0}\frac{n_p(p_0)d_c(p_0)d_p(p_0)}{d_p(p_0)\left[d_c(p_0)d_p(p_0)+n_c(p_0)n_p(p_0)\right]} = \frac{1}{p_0}\frac{d_c(p_0)}{n_c(p_0)} = \frac{1}{p_0 C(p_0)}$$

αφού $d_p(p_0)$=0.